MPSI

DS de mathématiques n°1

20 sept. 2025

Logique, ensembles

Durée : **3h**. Calculatrices non autorisées.
La clarté de la copie pourra faire varier la note de ±1 point.

Exercice 1 : Raisonnements

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1) On considère l'assertion suivante :

$$P : \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad x\sqrt{n} \notin \mathbb{Q} \quad \Longrightarrow \quad x \text{ n'est pas un entier ou } n \geq 2$$

a) Écrire la négation de P.

b) En utilisant la contraposée, écrire une assertion Q qui est équivalente à P. En déduire (avec justification) si P est vraie ou fausse.

2) Soit $q \in \mathbb{Q}$ et $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

a) Donner une écriture de $\mathbb{Q}$ en tant qu'ensemble paramétré. Que peut-on en déduire sur q ?

b) En raisonnant par l'absurde, montrer que $r + q \notin \mathbb{Q}$.

3) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = u_2 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{2}{n+2}u_n$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1 \leq u_n \leq n^2$

Exercice–Problème 2 : Une équation fonctionnelle dans $\mathbb{N}$

Soit f une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que :

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2 \quad f(m^2 + n^2) = f(m)^2 + f(n)^2$$

L'objectif de cet exercice est de prouver que les **seules** solutions de cette équation fonctionnelle sont :

— L'application nulle, donnée par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = 0$

— L'application identité, donnée par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = n$

On notera que ces deux fonctions sont bien des solutions, et ce de façon évidente. Dans la suite de l'exercice, on considère f une fonction solution quelconque et on note a l'entier naturel $f(1)$.

1) Montrer que $f(0) = 0$.

2) En déduire que pour tout n dans $\mathbb{N}$, on a $f(n^2) = f(n)^2$.

3) En déduire que a est égal à 0 ou à 1.

4) Dans cette question, on souhaite montrer que pour tout entier naturel n, on a $f(n) = an$. On notera que l'égalité est déjà vérifiée pour $n = 0$ et $n = 1$.

a) Vérifier successivement les égalités $f(2) = 2a$, $f(4) = 4a$, et $f(5) = 5a$.

b) Utiliser les valeurs de $f(4)$ et de $f(5)$ pour montrer que $f(3) = 3a$.

c) Utiliser les valeurs de $f(1)$ et de $f(5)$ pour montrer que $f(7) = 7a$.

d) Par un calcul rapide et sans justifier de manière précise, montrer que $f(8) = 8a$, $f(9) = 9a$, $f(10) = 10a$ et $f(6) = 6a$.

On admet que pour tout entier k on a :

$$\begin{cases} (2k)^2 + (k-5)^2 = (2k-4)^2 + (k+3)^2 \\ (2k+1)^2 + (k-2)^2 = (2k-1)^2 + (k+2)^2 \end{cases}$$

e) Montrer par récurrence forte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(n) = an$. On notera que l'initialisation a déjà été faite pour n allant de 0 à 10. L'hérédité consistera donc à montrer que $f(n) = an$ à partir de $n = 11$.

5) Conclure en précisant le raisonnement utilisé.

Exercice–Problème 3 : La différence symétrique

Soit A et B deux sous-ensembles d'un même ensemble E, on appelle **différence symétrique** de A et B l'ensemble noté $A\Delta B$ que l'on définit par :

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

On note par ailleurs $A\Delta' B$ l'ensemble :

$$A\Delta' B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Enfin, pour tout sous-ensemble X de E, on notera $\overline{X}$ son complémentaire dans E.

1) Soit C et D deux sous-ensembles de E. Montrer que $C \setminus D = C \cap \overline{D}$.

2) En déduire une nouvelle expression de $A\Delta B$ et de $A\Delta' B$ avec uniquement des opérations d'unions, d'intersections, et de passages au complémentaire.

3) Montrer que $A\Delta B = A\Delta' B$.

Ainsi, $A\Delta' B$ n'est qu'une expression alternative de la différence symétrique de A et de B. Dans la suite, on se contentera d'appeler $A\Delta B$ cet ensemble.

4) Montrer que l'intersection est distributive par rapport à la différence symétrique, c'est-à-dire montrer que :

$$A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$$

5) Montrer que :

$$A\Delta B = A\Delta C \implies B = C$$

6) L'ensemble A étant fixé, déterminer un ensemble B_0 tel que $A\Delta B_0 = \varnothing$. En déduire tous les sous-ensembles X de E qui vérifient $A\Delta X = \varnothing$.

7) L'ensemble A étant fixé, déterminer un ensemble B_1 tel que $A\Delta B_1 = E$. En déduire tous les sous-ensembles X de E qui vérifient $A\Delta X = E$.

8) Montrer que : $\forall A, C \in \mathscr{P}(E) \quad \exists! B \in \mathscr{P}(E) \quad A\Delta B = C$.

9) Avec $E = \mathbb{N}$, montrer que : $\exists A, B, C \in \mathscr{P}(E) \quad A \cup (B\Delta C) \neq (A \cup B)\,\Delta\,(A \cup C)$.